בס״ד, יום שני ז׳ טבת תשע״ב
2.1.12

הפקולטה למתמטיקה, הטכניון

בוחן בחדוא 1מ׳2 (104018) - סמסטר חורף תשע״ב

- **משך המבחן**: שעתיים.
- **מבנה הבוחן והניקוד**: במבחן 5 שאלות אמריקאיות , שלוש שאלות נכון/לא נכון ושתי שאלות פתוחות. בשאלות האמריקאיות תשובה נכונה מזכה ב-8 נקודות ובשאלות נכון/לא נכון תשובה נכונה מזכה ב-4 נקודות. הניקוד עבור השאלות הפתוחות מצוין ליד כל סעיף. סך הנקודות שאפשר לקבל הוא 102 אך הציון המקסימאלי הוא 100.
- **אין להשתמש** בשום חומר עזר (כולל מחשבון וטלפון סלולארי). יש להשתמש בעט **שחור** או **כחול** בלבד. **אין להשתמש בעפרון**.
- **החלק האמריקאי:** את התשובות לשאלות האמריקאיות ולשאלות נכון/לא נכון יש לסמן בעמוד זה. עותק של עמוד זה נמצא גם בדף האחרון של הבחינה ע״מ שתוכלו לשמור ברשותכם העתק של התשובות שכתבתם (תוכלו לתלשו ולקחתו כשהבחינה מסתיימת)
- **החלק הפתוח:** יש לתת פתרון מלא ומנומק, ולהקפיד על כתיבה ברורה ומסודרת

תשובות לשאלות האמריקאיות

	א	ב	ג	ד	ה
1					
2					
3					
4					
5					

תשובות לשאלות נכון/לא נכון

	א	ב
1		
2		
3		

בהצלחה!

שאלות אמריקאיות

שאלה 1

תהא $f(x)$ פונקציה רציפה המקיימת: $\lim_{x\to\infty} f(x)=17, \lim_{x\to-\infty} f(x)=7, f(8)=20$ אזי בהכרח

א. ל- $f(x)$ יש מינימום גלובלי.
ב. ל- $f(x)$ יש אינפימום אבל לא מינימום
ג. ל- $f(x)$ יש סופרמום אבל לא מקסימום
ד. ל- $f(x)$ יש מינימום ומקסימום גלובלי
ה. ל- $f(x)$ יש מקסימום גלובלי.

פתרון. משרטוט סקיצה של הגרף ניתן לראות כי התשובה היא כי ל- $f(x)$ יש מקסימום גלובלי. באופן פורמלי הפתרון נובע מהגדרת הגבול באינסוף וממשפט ויירשטראס.

שאלה 2

נתונים שני הגבולות הבאים:

$$A=\lim_{n\to\infty}\left(1+sin\frac{1}{n}\right)^n, \quad B=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n^2]{n^{2n}+n^n+1}$$

אזי

א. $A=B$
ב. $A>B$
ג. $A<B$
ד. A אינסופי ו- B סופי
ה. A סופי ו- B אינסופי

פתרון.

$$A=\lim_{n\to\infty}\left(1+sin\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+sin\frac{1}{n}\right)^{1/sin\frac{1}{n}}\right)^{nsin\frac{1}{n}}=e$$

וממשפט הסנדביץ' נקבל כי $B=1$ ולכן התשובה היא ב'

שאלה 3

תהי $f:[0,1]\to[0,1]$ פונקציה רציפה אזי בהכרח

א. קיים $c \in (0,1]$ עבורו מתקיים $f(c) = ln\frac{\pi c}{2}$

ב. לא קיים $c \in [0,1]$ עבורו מתקיים $f(c) = sin\frac{\pi c}{2}$

ג. קיים $c \in [0,1]$ עבורו מתקיים $f(c) = cos\frac{\pi c}{2}$

ד. קיים $c \in [0,1]$ עבורו מתקיים $f(c) = tan\frac{\pi c}{8}$

ה. לא קיים $c \in [0,1]$ עבורו מתקיים $f(c) = tan\frac{\pi c}{8}$

פתרון. נגדיר פונקציה חדשה $g(x) = f(x) - cos\frac{\pi x}{2}$ מהגדרת f נקבל כי $g(0) \leq 0$ וכי $g(1) \geq 0$ ולכן קיימת נק' c בקטע האמור בסעיף ג' כך ש- $g(c) = 0$ כנדרש ולכן התשובה היא ג'. (מצאו דוגמאות נגדיות לשאר הסעיפים)

שאלה 4

נתונה הפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}[\tan x] & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

אזי בקטע $[-\pi, \pi]$

א. הפונקציה רציפה
ב. הפונקציה גזירה
ג. לפונקציה סוג אחד של נקודות אי-רציפות
ד. לפונקציה שלושה סוגי נקודות אי-רציפות
ה. לפונקציה שני סוגי נקודות אי-רציפות

פתרון. ב- $\pi/4$ יש נק' אי-רציפות מסוג קפיצה ובאפס הגבול שלה לא קיים (יש לה גבול מימין ששווה לאפס אבל הגבול משמאל לא קיים) ז"א יש שני סוגים של נק' אי-רציפות: קפיצה ועקרית. אם נניח שיש לה גם אי-רציפות סליקה בנקודה שלמה השונה מאפס (אם הנקודה לא שלמה הפונקציה רציפה), נניח בנקודה x_0 אזי לפונקציה $f(x) = \sin\frac{1}{x}[\tan x]$ יש גבול בנקודה x_0 ולכן גם לפונקציה $\frac{f(x)}{\sin\frac{1}{x}} = [\tan x]$. סתירה. משיקול דומה ניתן להראות שהנקודה $x_0 = \frac{\pi}{2}$ איננה סליקה ולכן התשובה היא ה.

שאלה 5

הערך של הגבול $\lim_{x\to 0}\frac{x+sinx}{x+arctanx}$ הוא

א. 0 ב. 2 ג. $\frac{1}{4}$ ד. 1 ה. $\frac{1}{2}$

פתרון. ניתן לראות ע״י קירוב ליניארי למשל כי הפונקציות לעיל מתנהגות כמו x בסביבה של 0 ולכן הגבול הוא 1. כלומר התשובה היא ד׳.

שאלות נכון/לא נכון

שאלה 6

אם $|f(x)|$ רציפה בקטע $[a,b]$ אזי גם $f(x)$ רציפה שם.

א. נכון ב. לא נכון
פתרון: לא נכון – למשל פונקציה שמקבלת על האי-שליליים 1 ועל השליליים אפס.

שאלה 7

כל נקודות אי-הרציפות של $[\cos x]$ סליקות

א. נכון ב. לא נכון

פתרון: לא נכון למשל בנק׳ $x = \frac{\pi}{2}$ מקבלים נק׳ קפיצה

שאלה 8

אם x_0 נקודת קיצון מקומי אזי $f'(x_0) = 0$.

א. נכון ב. לא נכון.
פתרון: לא נכון. למשל הפונקציה ערך מוחלט בנק׳ 0

שאלות פתוחות

שאלה 1 (25 נק׳)

א. (5 נק׳) נסחו את משפט ערך הביניים
פתרון: ראה בספר הקורס

ב. (20 נק') הוכיחו כי למשוואה $f(x) = x^x + lnx + e^x = 0$ לפחות פתרון אחד. נמקו כל שלב. האם ל- $f'(x)$ יש שורש בקטע $[1,\infty]$? נמקו!

פתרון: $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ ו- $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ בפרט קיים a כך ש- $f(a) > 0$ וקיים $b < a$ כך ש- $f(b) < 0$. כיוון שהפונקציה רציפה (מדוע?) ע"פ משפט ערך הביניים נקבל כי קיימת נקודה c כך ש- $f(c) = 0$.

לגבי השאלה השני'ה. $f'(x) = x^x(1 + lnx) + \frac{1}{x} + e^x$ ולכן היא חיובית תמיד בקטע המדובר.

<u>שאלה 2</u> (25 נק')

א. (5 נק') הגדירו $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$

פתרון. ראו בספר הקורס

ב. (20 נק') הוכיחו כי $\lim_{x\to 1}\frac{x+3}{x+2}=\frac{4}{3}$

פתרון. יהי $\varepsilon>0$ צ"ל שקיים $\delta>0$ כך שאם

$|x-1|<\delta$ אזי $\left|\frac{x+3}{x+2}-\frac{4}{3}\right|<\varepsilon$

$$B(\delta)=\left|\frac{x+3}{x+2}-\frac{4}{3}\right|=\left|\frac{3(x+3)-4(x+2)}{3(x+2)}\right|\le\left|\frac{1-x}{x+2}\right|$$
$$=\frac{|x-1|}{|x+2|}$$

נניח כעת כי $|x-1|<\delta_1$ אזי $1-\delta_1<x<1+\delta_1$. כלומר

$3-\delta_1<x+2<3+\delta_1$ ולכן אם נבחר $\delta_1=1$ נקבל כי

$2<x+2<4$ כלומר כי $|x+2|>2$ ולכן נקבל כי $B(\delta)\le\frac{|x-1|}{2}$

נבחר $\delta=\min\{1,2\varepsilon\}$ ונקבל את הדרוש.

בס״ד, יום שני ז׳ טבת תשע״ב
2.1.12

הפקולטה למתמטיקה, הטכניון

בוחן בחדוא 1מ׳2 (104018) - סמסטר חורף תשע״ב

- **משך המבחן**: שעתיים.
- **מבנה הבוחן והניקוד**: במבחן 5 שאלות אמריקאיות , שלוש שאלות נכון/לא נכון ושתי שאלות פתוחות. בשאלות האמריקאיות תשובה נכונה מזכה ב-8 נקודות ובשאלות נכון/לא נכון תשובה נכונה מזכה ב-4 נקודות. הניקוד עבור השאלות הפתוחות מצוין ליד כל סעיף. סך הנקודות שאפשר לקבל הוא 104 אך הציון המקסימאלי הוא 100.
- **אין להשתמש** בשום חומר עזר (כולל מחשבון וטלפון סלולארי). יש להשתמש בעט **שחור** או **כחול** בלבד. **אין להשתמש בעפרון**.
- **החלק האמריקאי:** את התשובות לשאלות האמריקאיות ולשאלות נכון/לא נכון יש לסמן בעמוד זה. עותק של עמוד זה נמצא גם בדף האחרון של הבחינה ע״מ שתוכל לשמור ברשותך העתק של התשובות שכתבת (תוכל לתלשו ולקחתו כשהבחינה מסתיימת)
- **החלק הפתוח:** יש לתת פתרון מלא ומנומק, ולהקפיד על כתיבה ברורה ומסודרת

תשובות לשאלות האמריקאיות

	א	ב	ג	ד	ה
1					
2					
3					
4					
5					

תשובות לשאלות נכון/לא נכון

	א	ב
1		
2		
3		

בהצלחה!